

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—o0o—

ĐỖ NGỌC BÍCH

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG
TRONG TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 6/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—o0o—

ĐỖ NGỌC BÍCH

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG
TRONG TAM GIÁC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 8640113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. TRẦN VIỆT CƯỜNG

Thái Nguyên, 6/2018

Mục lục

Danh mục ký hiệu	ii
Danh sách hình vẽ	iii
Mở đầu	1
Chương 1. Một số vấn đề về đường đối trung	3
1.1 Một số kiến thức chuẩn bị	3
1.1.1 Một số định lý trong hình học	3
1.1.2 Đường đối song	7
1.1.3 Đường đẳng giác	8
1.2 Đường đối trung	14
1.2.1 Định nghĩa và cách dựng	14
1.2.2 Một số tính chất	17
Chương 2. Một số ứng dụng của đường đối trung	22
2.1 Bài toán chứng minh quan hệ bằng nhau	22
2.2 Bài toán liên quan đến yếu tố cố định	31
2.3 Bài toán chứng minh đồng quy	39
2.4 Bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng	41
2.5 Bài toán chứng minh các điểm cùng thuộc một đường tròn	45
2.6 Một số bài toán khác	47
Kết luận	61
Tài liệu tham khảo	62

Danh mục ký hiệu

S_{ABC}	Diện tích tam giác ABC
\overline{AB}	Cạnh có hướng từ A tới B
$(ABCD) = -1$	A, B, C, D là hàng điểm điều hòa
$O(ABCD) = -1$	OA, OB, OC, OD là chùm điều hòa
$d(L; AB)$	Khoảng cách từ điểm L tới đường thẳng AB
$AB \parallel CD$	Đường thẳng AB song song với CD
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF

Danh sách hình vẽ

1.1	Định lý Menelaus	4
1.2	Định lý Pascal	4
1.3	$APBQ$ là tứ giác điều hòa.	6
1.4	MN là đường đối song với BC	7
1.5	AM và AH là hai đường đẳng giác	8
1.6	AO và AH là hai đường đẳng giác	9
1.7	AD và AE là hai đường đẳng giác	9
1.8	d_1 và d_2 là hai đường đẳng giác	11
1.9	A_1, A_2, B_1, B_2 cùng nằm trên một đường tròn	12
1.10	AD là đường đối trung	14
1.11	AM và AD đẳng giác	16
1.12	AN là đường đối trung của tam giác ABC	17
1.13	AQ là đường đối trung	19
1.14	AQ là đường đối trung của tam giác ABC	21
2.1	AD là đường đối trung của tam giác ABC	23
2.2	AM là trung tuyến của tam giác ABC	24
2.3	AF là đường đối trung của tam giác ABC	26
2.4	AA' là trung tuyến của tam giác $AB'C'$	28
2.5	Đường đối song DM và DN bằng nhau	28
2.6	Đường đối song PN và QM bằng nhau	29
2.7	A' là trung điểm BC	30
2.8	D đối xứng với A qua KM	31
2.9	R không phụ thuộc vào đường tròn Γ	32

2.10	R không phụ thuộc vào đường tròn Γ	33
2.11	MC đi qua trung điểm NP	34
2.12	Q luôn nằm trên đường đối trung từ góc A	36
2.13	Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ luôn nằm trên AL .	38
2.14	I luôn nằm trên đường thẳng vuông góc với AB tại H	39
2.15	AD, BN, CM đồng quy	41
2.16	S, A, H thẳng hàng	42
2.17	BE chia đôi AC	43
2.18	Đường tròn Lemoine thứ nhất	45
2.19	Đường tròn Lemoine thứ hai	46
2.20	Tứ giác $EFNP$ nội tiếp	47
2.21	L là trọng tâm tam giác PQR	48
2.22	Các tiếp tuyến với (O) tại A, C và BD đồng quy tại S	49
2.23	$CD = 3FP$	51
2.24	AO là đường đối trung của tam giác BAD	52
2.25	Tam giác ABC có đường đối trung AS	55
2.26	AD là đường đối trung, AM là trung tuyến	56
2.27	AH là đường cao của tam giác ABC	57
2.28	AD là đường đối trung ngoài của tam giác ABC	59

Mở đầu

Trong nội dung Hình học ở bậc phổ thông, tam giác có một vai trò đặc biệt. Việc chứng minh các tính chất hình học, giải bài toán hình học đòi hỏi chúng ta phải vận dụng những kiến thức về tam giác một cách linh hoạt.

Trong tam giác, đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến qua đường phân giác trong được gọi là đường đối trung của tam giác. Đường đối trung là một trong những vấn đề hấp dẫn của hình học phẳng. Nó có một số tính chất hình học thú vị như: đường đối trung chia cạnh đối diện thành những phần tỉ lệ với bình phương các cạnh kề; đường đối trung xuất phát từ một đỉnh của tam giác và đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp của tam giác tại hai đỉnh kia; Ba đường đối trung của tam giác đồng quy tại một điểm... Vận dụng những tính chất này, ta có thể giải được nhiều bài toán hình học thú vị.

Với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về vấn đề đường đối trung, chúng tôi lựa chọn đề tài “*Một số vấn đề về đường đối trung trong tam giác*” dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Trần Việt Cường.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận văn gồm hai chương.

Chương 1. Một số vấn đề đường đối trung. Ngoài việc trình bày một số kiến thức chuẩn bị có liên quan đến trong đề tài, chương này được chúng tôi giành để trình bày định nghĩa, cách dựng và cùng một số tính chất thú vị của đường đối trung. Các nội dung được trình bày trên cơ sở tham khảo các tài liệu [2, 3, 1, 7, 9].

Chương 2. Một số ứng dụng của đường đối trung. Trong chương này, chúng tôi áp dụng các tính chất của Đường đối trung trong quá trình giải một

số bài toán hình học phẳng. Các nội dung được trình bày trên cơ sở tham khảo các tài liệu [2, 3, 1, 5].

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc đến PGS. TS. Trần Việt Cường. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của học trò trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và giúp đỡ tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các thầy giáo, cô giáo khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp, lãnh đạo Trường Trung học phổ thông Vũ Văn Hiếu, Hạ Long, Quảng Ninh đã động viên, cổ vũ, tạo điều kiện để tác giả có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Cuối cùng, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2018

Người viết luận văn

Đỗ Ngọc Bích

Chương 1

Một số vấn đề về đường đối trung

Chương 1, trình bày một số kiến thức chuẩn bị như hai đường thẳng đẳng giác trong tam giác, đường đối song của một cạnh tam giác và trình bày định nghĩa, cách dựng và cùng một số tính chất thú vị của đường đối trung. Các nội dung được trình bày trên cơ sở tham khảo các tài liệu [1, 2, 3, 7, 9].

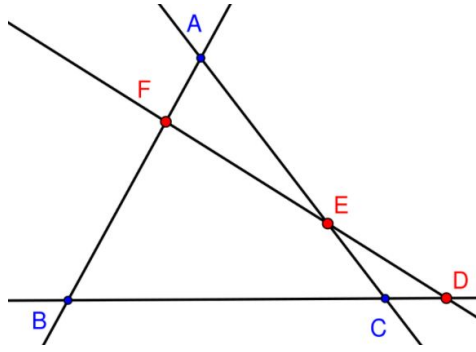
1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

1.1.1 Một số định lý trong hình học

Định lý 1.1.1 (Định lý Thales, [2]). *Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

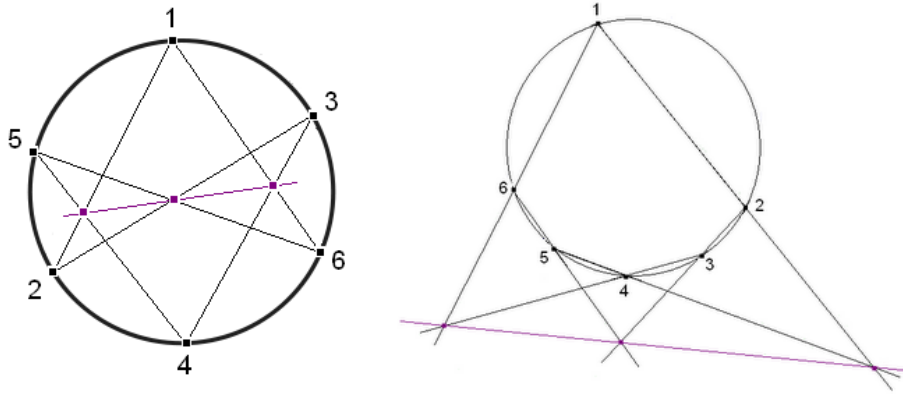
Định lý 1.1.2 (Định lý Menelaus, [2]). *Cho tam giác ABC . D, E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho ba điểm có một số chắn điểm thuộc cạnh tam giác ABC . Khi đó, D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi*

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1.$$



Hình 1.1: Định lý Menelaus

Định lý 1.1.3 (Định lý Pascal, [2]). *Cho sáu điểm bất kỳ trên một conic (elip, parabol hoặc hyperbol) khi đó giao điểm của các cặp cạnh đối diện thẳng hàng. Đường thẳng này gọi là đường thẳng Pascal.*



Hình 1.2: Định lý Pascal

Định lý 1.1.4 (Định lý Ceva, [2]). *Cho tam giác ABC và ba đường thẳng AA', BB', CC' xuất phát từ các đỉnh của tam giác và cắt đường thẳng chứa cạnh đối diện tại A', B', C' sao cho: hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên ba cạnh của tam giác hoặc một trong ba điểm đó nằm trên một cạnh của tam giác còn hai điểm kia nằm trên phần kéo dài của hai cạnh còn lại. Điều kiện cần và đủ để AA', BB', CC' đồng quy hoặc song song với nhau là ta có hệ thức:*

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

Người ta thường gọi ba đường thẳng AA', BB', CC' xuất phát từ các đỉnh của tam giác ABC và đồng quy tại một điểm là ba đường thẳng Ceva; Các